Capítulo 2

FUNCIONES HOLOMORFAS

Problema 2.1. Estudia en qué puntos son derivables en sentido complejo las siguientes funciones ($z = x + iy$):

(a) $f(z) = |z|^\alpha$, con $\alpha > 0$,

(b) $f(z) = \sqrt{|xy|}$,

(c) $f(z) = h(x)$, con $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,

(d) $f(z) = h(y)$, con $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,

(e) $f(z) = \dfrac{1}{z^2} + |z|^2$,

(f) $f(z) = z \operatorname{Re} z$,

(g) $f(z) = \dfrac{1}{(z + 1/z)^2}$,

(h) $f(z) = e^{z^3/(z+3)}$,

(i) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$.

(j) $f(z) = x^2 - y^2 - i2xy$,

(k) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(2xy + x^2 - y^2)$.

Solución: (a) $f(z) = |z|^\alpha = (x^2 + y^2)^{\alpha/2} = u(x, y)$; evidentemente, $v(x, y) = 0$. Como función de $\mathbb{R}^2$, la función $u(x, y)$ es derivable en todo $\mathbb{R}^2$ si $\alpha \geq 2$ y en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ si $\alpha < 2$. Por otro lado, las condiciones de Cauchy-Riemann implican

$$\begin{aligned} u_x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \alpha x(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} = 0, \\ u_y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \alpha y(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} = 0, \end{aligned}$$

con lo que si $\alpha < 2$ no se cumplen en ninguna punto de $\mathbb{C}$, y si $\alpha \geq 2$ sólo se cumplen en $z = 0$. Por lo tanto la función $f(z)$ es derivable sólo en $z = 0$ y sólo si $\alpha \geq 2$.

(b) De nuevo $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ y $v(x, y) = 0$. La función $u(x, y)$ es derivable en $\mathbb{R}^2$ salvo en los ejes, y también en $(0, 0)$.

Consideremos un punto del primer cuadrante, $x > 0$, $y > 0$; las derivadas en él valen

$$u_x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}, \qquad u_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Como las condiciones de Cauchy-Riemann imponen $u_x = u_y = 0$, no pueden cumplirse para ningún punto con $x > 0$, $y > 0$. Análogo razonamiento puede hacerse con los otros tres cuadrantes.

En cuanto al origen, las derivadas parciales en él son $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$, así que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, luego la función $f(z)$ es derivable sólo en $z = 0$.

(c) Ahora $u(x,y)=h(x)$ y $v(x,y)=0$, ambas derivables y con derivadas continuas en $\mathbb{R}^2$. Las condiciones de Cauchy-Riemann, $u_x=u_y=0$, imponen que $h'(x)=0$, con lo que la función $f(z)$ es derivable en todos los puntos $z=x+iy$ tales que x es solución de $h'(x)=0$ (rectas verticales). Evidentemente, es derivable en todo $\mathbb{C}$ si h es constante.

(d) Igual que el apartado anterior, pero ahora los puntos son los $z=x+iy$ donde y es solución de $h'(y)=0$ (rectas horizontales).

(e) Como z^{-2} es derivable en $\mathbb{C}-\{0\}$ y $|z|^2$ sólo es derivable en $z=0$, $f(z)$ no es derivable en ningún punto.

(f) $f(z)=z\operatorname{Re}z=(x+iy)x=x^2+ixy$, de donde

$$u(x,y)=x^2, \qquad v(x,y)=xy.$$

Ambas funciones son derivables con derivadas continuas en $\mathbb{R}^2$. Las condiciones de Cauchy-Riemann imponen

$$\begin{aligned} u_x &= v_y & \Longrightarrow \quad & 2x=x, \\ u_y &= -v_x & \Longrightarrow \quad & 0=-y, \end{aligned}$$

cuya única solución es $x=y=0$. Así que $f(z)$ sólo es derivable en $z=0$.

(g) $f(z)$ es derivable salvo en $z=0$ y donde $z+z^{-1}=0$, es decir, $z^2+1=0$ o, lo que es equivalente, $z=\pm i$. Pero en $z=0$ la función tiene una singularidad “evitable” porque

$$\frac{1}{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\frac{z^2}{z^2+1},$$

que es derivable en $\mathbb{C}-\{\pm i\}$.

(h) $f(z)$ es derivable salvo en $z=-3$.

(i) $f(z)$ es derivable salvo en $z=\pm i$.

(j) $f(z)=x^2-y^2-i2xy=\overline{z}^2=F(z,\overline{z})$, y las condiciones de Cauchy-Riemann imponen

$$F_{\overline{z}}=0 \quad \Longrightarrow \quad 2\overline{z}=0 \quad \Longrightarrow \quad z=0,$$

así que $f(z)$ sólo es derivable en $z=0$.

(k) $f(z)=x^2-y^2-2xy+i(2xy+x^2-y^2)=x^2-y^2+i2xy+i(x^2-y^2+i2xy)=z^2+iz^2=(1+i)z^2$, que es evidentemente derivable en $\mathbb{C}$. □

Problema 2.2. (a) Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Prueba que $f(z)$ debe ser constante si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones en Ω:

(a.1) $f'(z) = 0$,
(a.2) $\operatorname{Re} f(z)$ es constante,
(a.3) $\operatorname{Im} f(z)$ es constante,
(a.4) $\overline{f(z)}$ es holomorfa,
(a.5) $|f(z)|$ es constante,
(a.6) $\arg f(z)$ es constante.

(b) Prueba que cuando $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son holomorfas en Ω,

(b.1) $f'(z) = g'(z)$ implica $f(z) = g(z) + \gamma$, siendo $\gamma \in \mathbb{C}$;
(b.2) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z)$ implica $f(z) = g(z) + ic$, siendo $c \in \mathbb{R}$;
(b.3) $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} g(z)$ implica $f(z) = g(z) + c$, siendo $c \in \mathbb{R}$;
(b.4) $|f(z)| = |g(z)|$ implica $f(z) = g(z)e^{ic}$, siendo $c \in \mathbb{R}$;
(b.5) $\arg f(z) = \arg g(z)$ implica $f(z) = cg(z)$, siendo $c \in \mathbb{R}^+$.

Solución: (a) (a.1) $f'(z) = u_x + iv_x = 0$, de modo que

$$\begin{cases} u_x = v_y = 0 \\ v_x = -u_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla u = \nabla v = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = \text{const.} \\ v = \text{const.} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \text{const.}$$

(a.2) $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \text{const.}$, por lo tanto $u_x = u_y = 0$ y por las condiciones de Cauchy-Riemann $v_x = v_y = 0$, lo que implica que $v(x, y) = \text{const.}$. Así pues, $f(z) = \text{const.}$.

(a.3) El razonamiento es idéntico al del apartado anterior.

(a.4) Veamos qué implica el que $\overline{f(z)}$ sea holomorfa. Como $\overline{f(z)} = u - iv$, las condiciones de Cauchy-Riemann se traducen en

$$\begin{cases} u_x = -v_y, \\ u_y = v_x. \end{cases}$$

Por su parte, las mismas condiciones sobre $f(z)$ implican

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases}$$

Así que tenemos que $u_x = -v_y = v_y$, luego $v_y = 0$ y por tanto $u_x = 0$. Asimismo $u_y = v_x = -v_x$, por lo que $v_x = 0$ y $u_y = 0$. De ello se sigue que u y v son constantes y, por tanto, $f(z) = \text{const.}$.

(a.5) $|f(z)| = c$ significa que $|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = c^2$ y, por lo tanto, $\overline{f(z)} = c^2/f(z)$. Como el miembro derecho es una función holomorfa, eso significa que $\overline{f(z)}$ es holomorfa, y por el apartado anterior, que $f(z) = \text{const.}$.

(a.6) $\arg f(z) = c$ significa que $f(z) = r(z)e^{ic}$, siendo $r(z)$ una función que toma valores reales solamente. Pero como $f(z)$ debe ser holomorfa, también $r(z)$ tiene que serlo. Como en el caso anterior, esto significa que $r(z) = \text{const.}$ y, por tanto, que $f(z) = \text{const.}$. □

(b) (b.1) Se deduce de que

$$\frac{d}{dz}\big[f(z) - g(z)\big] = 0.$$

(b.2) Se deduce de que $\operatorname{Re}\big[f(z)-g(z)\big]=0$. Evidentemente, la constante sólo puede ser imaginaria pura.

(b.3) Se deduce de que $\operatorname{Im}\big[f(z)-g(z)\big]=0$. Evidentemente, la constante sólo puede ser real.

(b.4) Se deduce de que

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|=1.$$

La constante ha de tener módulo 1.

(b.5) Se deduce de que

$$\arg\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

y, por tanto, $f(z)/g(z)$ debe ser una constante real positiva.

Problema 2.3. Halla una función holomorfa $f(z)$, especificando el dominio en que lo es, tal que $\operatorname{Re} f(z)$ sea ($z=x+iy$)

(a) $ax+by+c$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$,

(b) $e^{-x}(x\operatorname{sen}y-y\cos y)$,

(c) $e^{-y}\cos x$,

(d) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

(e) $e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}2xy$,

(f) $xe^{-x}\cos y+ye^{-x}\operatorname{sen}y$,

(g) $\operatorname{sen}x\cosh y+2\cos x\operatorname{senh}y + x^2-y^2+4xy$,

(h) $\ln\sqrt{x^2+y^2}$,

(i) $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,

(j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}x^{2n-2k}y^{2k}$.

Solución: Además de emplear el procedimiento sistemático de resolver las ecuaciones de Cauchy-Riemann, otra forma de resolver este problema es guiarse por patrones reconocibles en la función. Una vez hallada una función holomorfa $f(z)$ cuya parte real sea la especificada, según vimos en el problema 2.2, cualquier otra que tenga la misma parte real será de la forma $f(z)+i\gamma$, con γ una constante arbitraria.

(a)

$$\operatorname{Re} f(z)=ax+by+c=\operatorname{Re}(az)+\operatorname{Im}(bz)+c=\operatorname{Re}(az)+\operatorname{Re}(-ibz)+c=\operatorname{Re}(az-ibz+c),$$

luego $f(z)=(a-ib)z+c$.

(b)

$$\operatorname{Re} f(z)=e^{-x}(x\operatorname{sen}y-y\cos y)=-e^{-x}(y\cos y-x\operatorname{sen}y)=-e^{-x}\operatorname{Re}\big[(y-ix)e^{-iy}\big]$$
$$=\operatorname{Re}\left(ize^{-iz}\right),$$

luego $f(z)=ize^{-z}$.

(c)

$$\operatorname{Re} f(z)=e^{-y}\cos x=e^{-y}\operatorname{Re}e^{ix}=\operatorname{Re}e^{-y+ix}=\operatorname{Re}e^{iz},$$

luego $f(z)=e^{iz}$.

(d)

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}=\operatorname{Re}\left(\frac{z}{|z|^2}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)=\operatorname{Re}z^{-1},$$

luego $f(z)=z^{-1}$.

(e)

$$\operatorname{Re} f(z) = e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy) = e^{x^2-y^2}\operatorname{Im} e^{i2xy} = \operatorname{Im} e^{x^2-y^2+i2xy} = \operatorname{Im} e^{z^2} = \operatorname{Re}\left(-ie^{z^2}\right),$$

luego $f(z) = -ie^{z^2}$.

(f)

$$\operatorname{Re} f(z) = e^{-x}(x\cos y + y\operatorname{sen} y) = e^{-x}\operatorname{Re}\left[(x+iy)e^{-iy}\right] = \left(ze^{-z}\right),$$

luego $f(z) = ze^{-z}$.

(g)

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f(z) &= \operatorname{sen} x\cosh y + 2\cos x\operatorname{senh} y + x^2 - y^2 + 4xy = \operatorname{Re}\operatorname{sen} z + 2\operatorname{Im}\operatorname{sen} z + \operatorname{Re} z^2 + 2\operatorname{Im} z^2\\ &= \operatorname{Re}\left(\operatorname{sen} z - 2i\operatorname{sen} z + z^2 - 2iz^2\right),\end{aligned}$$

luego $f(z) = (1-2i)(\operatorname{sen} z + z^2)$.

(h)

$$\operatorname{Re} f(z) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln|z| = \operatorname{Re}\log z,$$

luego $f(z) = \log z$.

(i)

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^4} = \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}^2}{|z|^4}\right) = \operatorname{Re} z^{-2},$$

luego $f(z) = z^{-2}$.

(j)

$$\operatorname{Re} f(z) = \sum_{k=0}^{n}\underbrace{(-1)^k}_{=i^{2k}}\binom{2n}{2k}x^{2n-2k}y^{2k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2n-2k}(iy)^{2k} = \operatorname{Re}\left[(x+iy)^{2n}\right],$$

luego $f(z) = z^{2n}$. □

Problema 2.4. Sea $u \in \mathcal{C}^2\big(D(z_0,r)\big)$ una función armónica y $z_0 = x_0 + iy_0$. Prueba que

$$v(x,y) = c + \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} u_y(t,y_0)\,dt$$

define una conjugada armónica de u en $D(z_0,r)$ tal que $v(x_0,y_0) = c$.

Solución: Resolviendo la ecuación $v_y = u_x$ obtenemos

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)\,dt + h(x),$$

siendo $h(x)$ arbitraria. Sustituimos ahora en $v_x = -u_y$ y obtenemos

$$-u_y(x,y) = \int_{y_0}^{y}\underbrace{u_{xx}(x,t)}_{=-u_{tt}(x,t)}\,dt + h'(x) = -\int_{y_0}^{y} u_{tt}(x,t)\,dt + h'(x) = -u_y(x,y) + u_y(x,y_0) + h'(x),$$

y para que se cumpla la igualdad tiene que ocurrir que

$$h'(x) = -u_y(x, y_0) \qquad \Longrightarrow \qquad h(x) = -\int_{x_0}^{x} u_y(t, y_0)\, dt + \gamma,$$

siendo γ una constante a determinar. Entonces

$$v(x, y) = \gamma + \int_{y_0}^{y} u_x(x, t)\, dt - \int_{x_0}^{x} u_y(t, y_0)\, dt,$$

y como $v(x_0, y_0) = \gamma$ porque las integrales se anulan, encontramos que $\gamma = c$. □

Problema 2.5. (a) Deduce que la expresión de las ecuaciones de Cauchy-Riemann cuando la función viene expresada en coordenadas polares son

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \qquad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

(b) Prueba a continuación que la derivada de $f(z) = u + iv$ puede obtenerse, para $z \neq 0$, de cualquiera de las dos formas

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r), \qquad f'(z) = \frac{-i}{z}(u_\theta + iv_\theta).$$

Solución: (a)

$$\begin{aligned} u_r &= u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta, \\ u_\theta &= u_x x_\theta + u_y y_\theta = r(-u_x \operatorname{sen}\theta + u_y \cos\theta), \end{aligned}$$

y para v se verifican unas ecuaciones análogas. Entonces,

$$\begin{aligned} u_r &= u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta = v_y \cos\theta - v_x \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{r} v_\theta, \\ v_r &= v_x \cos\theta + v_y \operatorname{sen}\theta = -u_y \cos\theta + u_x \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{r} u_\theta. \end{aligned}$$

(b) Sabemos que $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$, así que sumando las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_r &= u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta, \\ v_r &= v_x \cos\theta + v_y \operatorname{sen}\theta, \end{aligned}$$

obtenemos

$$u_r + iv_r = \underbrace{(u_x + iv_x)}_{=f'(z)} \cos\theta + \underbrace{(u_y + iv_y)}_{=if'(z)} \operatorname{sen}\theta = f'(z) e^{i\theta},$$

de donde $f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} u_\theta &= -u_x \operatorname{sen}\theta + u_y \cos\theta, \\ \frac{1}{r} v_\theta &= -v_x \operatorname{sen}\theta + v_y \cos\theta, \end{aligned}$$

con lo que

$$\frac{1}{r}(u_\theta + iv_\theta) = -(u_x + iv_x) \operatorname{sen}\theta + (u_y + iv_y) \cos\theta = f'(z)(-\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta) = if'(z) e^{i\theta},$$

y por lo tanto

$$f'(z) = \frac{-i}{re^{i\theta}}(u_\theta + iv_\theta) = \frac{-i}{z}(u_\theta + iv_\theta). \qquad \square$$

Problema 2.6. (a) Demuestra que la función

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}, \qquad -\pi < \theta < \pi,$$

es holomorfa en su dominio de definición y que $f'(z) = 1/2f(z)$.

(b) Repite el apartado anterior para la función

$$f(z) = \ln r + i\theta, \qquad -\pi < \theta < \pi,$$

y verifica que $f'(z) = 1/z$.

Solución: (a) $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} = \sqrt{r}\cos(\theta/2) + i\sqrt{r}\operatorname{sen}(\theta/2) = u + iv$, luego

$$u_r = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos(\theta/2), \qquad u_\theta = -\frac{\sqrt{r}}{2}\operatorname{sen}(\theta/2),$$
$$v_r = \frac{1}{2\sqrt{r}}\operatorname{sen}(\theta/2), \qquad v_\theta = \frac{\sqrt{r}}{2}\cos(\theta/2),$$

y de ahí que $u_r = v_\theta/r$ y $v_r = -u_\theta/r$, lo que prueba que $f(z)$ es holomorfa en su dominio. Su derivada vale

$$f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{2\sqrt{r}}e^{i\theta/2} = \frac{1}{2\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2f(z)}.$$

(b) $f(z) = \ln r + i\theta = u + iv$, luego

$$u_r = \frac{1}{r}, \qquad u_\theta = 0,$$
$$v_r = 0, \qquad v_\theta = 1,$$

y de ahí que $u_r = v_\theta/r$ y $v_r = -u_\theta/r$, lo que prueba que $f(z)$ es holomorfa en su dominio. Su derivada vale

$$f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{1}{z}. \qquad \square$$

Problema 2.7. (a) Si $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, con $z = re^{i\theta}$, es holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces, asumiendo que las funciones u y v tienen dos derivadas continuas, demuestra que

$$r(r\phi_r)_r + \phi_{\theta\theta} = 0$$

para $\phi = u$ o v. Esta es la forma polar de la ecuación de Laplace.

(b) Verifica que $u(r,\theta) = \ln r$ es armónica en el dominio $\Omega = \{re^{i\theta} : r > 0,\ -\pi < \theta < \pi\}$ empleando la forma polar de la ecuación de Laplace.

Solución: (a) Podemos escribir las condiciones de Cauchy-Riemann como

$$ru_r = v_\theta, \qquad \frac{1}{r}u_\theta = -v_r,$$

con lo que derivando la primera ecuación respecto a r y la segunda respecto a θ, obtenemos

$$(ru_r)_r = v_{\theta r}, \qquad \frac{1}{r}u_{\theta\theta} = -v_{r\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad r(ru_r)_r + u_{\theta\theta} = 0.$$

Si escribimos las condiciones de Cauchy-Riemann en la forma

$$rv_r = -u_\theta, \qquad \frac{1}{r}v_\theta = u_r$$

y hacemos lo mismo obtenemos

$$(rv_r)_r = -u_{\theta r}, \qquad \frac{1}{r}v_{\theta\theta} = u_{r\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad r(rv_r)_r + v_{\theta\theta} = 0.$$

(b)

$$r(ru_r)_r + \underbrace{u_{\theta\theta}}_{=0} = r(r(\ln r)')' = r(r/r)' = r(1)' = 0.$$ □

Problema 2.8. Sea $f(z) = \rho e^{i\phi}$ una función holomorfa escrita en forma polar. Determina las condiciones de Cauchy-Riemann que cumplen las funciones ρ y ϕ, tanto si $z = x + iy$ como si $z = re^{i\theta}$.
AYUDA: Escribe las condiciones de Cauchy-Riemann para la función $\log f(z)$.

Solución: Si $f(z)$ es holomorfa en algún dominio, $\log f(z)$ también lo será en algún dominio, y en él se cumpliran las condiciones de Cauchy-Riemann. Como

$$\log f(z) = \ln\rho + i\phi \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u = \ln\rho, \\ v = \phi, \end{cases}$$

las condiciones de Cauchy-Riemann serán

$$\begin{cases} (\ln\rho)_x = \phi_y \\ (\ln\rho)_y = -\phi_x \end{cases}, \qquad \begin{cases} (\ln\rho)_r = \frac{1}{r}\phi_\theta \\ \phi_r = -\frac{1}{r}(\ln\rho)_\theta \end{cases}.$$ □

Problema 2.9. Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, en su forma polar cuando sea necesario, halla la función holomorfa que verifica lo siguiente:

(a) $|f(z)| = e^{r^2\cos 2\theta}$,
(b) $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^x$,
(c) $\arg f(z) = xy$,
(d) $\arg f(z) = \theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta$,
(e) $\mathrm{Re}\, f(z) = \frac{1}{r}(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)$,
(f) $\mathrm{Re}\, f(z) = \ln r$.

Solución: Una manera sistemática de resolver este problema es emplear las condiciones de Cauchy-Riemann en sus distintas formas posibles (véase el problema 2.8). Sin embargo, vamos a emplear aquí una técnica basada en reconocimiento de patrones, ayudándonos de los resultados del problema 2.2.

(a) $r^2\cos 2\theta = x^2 - y^2 = \operatorname{Re} z^2$, con lo cual

$$|f(z)| = e^{\operatorname{Re} z^2} = \left|e^{z^2}\right|.$$

Según el problema 2.2,

$$f(z) = e^{z^2+ic}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) $(x^2+y^2)e^x = |z|e^{\operatorname{Re} z}$, así que

$$|f(z)| = |z|e^{\operatorname{Re} z} = |ze^z|;$$

por lo tanto (problema 2.2),

$$f(z) = ze^{z+ic}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) $\arg f(z) = xy = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(z^2)$, luego

$$\arg f(z) = \arg\left(e^{z^2/2}\right)$$

y, por tanto (problema 2.2),

$$f(z) = ce^{z^2/2}, \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

(d) $\arg f(z) = \theta + r\operatorname{sen}\theta = \operatorname{Im}(\log z + z)$, luego

$$\arg f(z) = \arg\left(ze^z\right),$$

con lo que (problema 2.2)

$$f(z) = cze^z, \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

(e) Sabemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f(z) &= \frac{1}{r}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{r^2}(r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{|z|^2}(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) = \frac{1}{|z|^2}(\operatorname{Re}\overline{z} - \operatorname{Im}\overline{z}) \\ &= \frac{1}{|z|^2}(\operatorname{Re}\overline{z} + \operatorname{Im}(i\overline{z})) = \operatorname{Re}\left[\frac{\overline{z}}{|z|^2}(1+i)\right] = \operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{z}\right),\end{aligned}$$

luego (problema 2.2)

$$f(z) = \frac{1+i}{z} + ic, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(f) Como $\operatorname{Re} f(z) = \ln r = \operatorname{Re}(\log z)$,

$$f(z) = \log z + ic, \quad c \in \mathbb{R}.$$ □

Problema 2.10. (a) Demuestra que si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, con $z = x+iy$, es una función holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f'(z_0) \neq 0$, con $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, las curvas de nivel de $u(x,y)$ y de $v(x,y)$ son ortogonales entre sí (sus vectores tangentes son ortogonales) en (x_0, y_0).

(b) Dibuja la familia de curvas de nivel de u y v para la función $f(z) = 1/z$ y comprueba la ortogonalidad descrita en el apartado anterior.

AYUDA: Recuerda que el gradiente de una función es ortogonal a sus curvas de nivel.

Solución: (a) Sabemos que el vector $\nabla\phi(x_0, y_0)$ es ortogonal a las curvas de nivel de $\phi(x, y)$ en el punto (x_0, y_0). Por otro lado, $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y \neq 0$ implica que, o bien u_x, u_y, v_y y v_y son distintas de cero las cuatro, o bien $u_x = v_y = 0$ pero entonces $u_y = v_x \neq 0$, o bien $v_x = -u_y = 0$ pero entonces $u_x = v_y \neq 0$; en cualquiera de los tres casos concluimos que $\nabla u \neq 0$ y que $\nabla v \neq 0$. Así pues,

$$f'(z_0) \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \nabla u(x_0, y_0) \neq 0 \\ \nabla v(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases} .$$

Calculemos ahora el producto escalar

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x \underbrace{v_x}_{=-u_y} + u_y \underbrace{v_y}_{=u_x} = -u_x u_y + u_y u_x = 0,$$

lo que implica que $\nabla u \perp \nabla v$, y si los vectores normales a las curvas de nivel de u y v son perpendiculares entre sí, las propias curvas lo son también.

(b)

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\[2ex] v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases} .$$

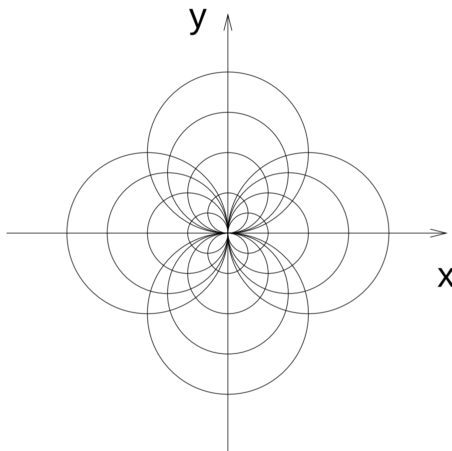
Las curvas $u(x, y) = c \neq 0$ son

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = c \quad \Leftrightarrow \quad x = c(x^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{c}x \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2},$$

es decir, son circunferencias centradas en $(1/2c, 0)$ y de radio $1/2c$. En cuanto a las curvas $v(x, y) = c' \neq 0$,

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} = c' \quad \Leftrightarrow \quad -y = c'(x^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = -\frac{1}{c'}y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2c'}\right)^2 = \frac{1}{4c'^2},$$

es decir, son circunferencias centradas en $(0, 1/2c')$ y de radio $1/2c'$. La figura muestra la ortogonalidad de estas dos familias de curvas.



□

Problema 2.11. (a) ¿Para qué valores de las constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ la función

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

es armónica?

(b) Para los valores encontrados en el apartado anterior halla la armónica conjugada de u.

Solución: (a)

$$u_x = 3ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad u_{xx} = 6ax + 2by,$$
$$u_y = bx^2 + 2cxy + 3dy^2, \qquad u_{yy} = 2cx + 6dy,$$

luego

$$\Delta u = 6ax + 2by + 2cx + 6dy = 2\big[(3a+c)x + (3d+b)y\big] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} c = -3a \\ b = -3d \end{cases} .$$

(b)

$$u = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3 = a(x^3 - 3xy^2) + d(y^3 - 3x^2y) = a\,\mathrm{Re}(z^3) - d\,\mathrm{Im}(z^3)$$
$$= \mathrm{Re}\left(az^3 + idz^3\right) = \mathrm{Re}\left[z^3(a+id)\right],$$

con lo que

$$f(z) = (a+id)z^3 + iK = u + iv$$

es una función holomorfa para todo $K \in \mathbb{R}$, cuya parte real es u. Así pues, la armónica conjugada de u es

$$v = \mathrm{Im}\, f(z) = a(3x^2y - y^3) + d(x^3 - 3xy^2) + K. \qquad \square$$

Problema 2.12. Determina las funciones $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera que sean armónicas las funciones

(a) $g(ax+by)$, con $a, b \in \mathbb{R}$,
(b) $g(x^2+y^2)$,
(c) $g(xy)$,
(d) $g\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$,
(e) $g\big((x^2+y^2)/x\big)$,
(f) $g(y/x)$.

Solución: (a) Denotando $\xi = ax + by$,

$$\phi_x = g'(\xi)a, \qquad \phi_{xx} = g''(\xi)a^2,$$
$$\phi_y = g'(\xi)b, \qquad \phi_{yy} = g''(\xi)b^2,$$

luego

$$\Delta\phi = g''(\xi)(a^2+b^2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g''(\xi) = 0,$$

cuya solución es

$$g(\xi) = A\xi + B, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) Denotando $\xi = x^2 + y^2 \geq 0$,

$$\phi_x = 2xg'(\xi), \qquad \phi_{xx} = 2g'(\xi) + 4x^2 g''(\xi),$$
$$\phi_y = 2yg'(\xi), \qquad \phi_{yy} = 2g'(\xi) + 4y^2 g''(\xi),$$

luego

$$\Delta\phi = 4\xi g''(\xi) + 4g'(\xi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi g''(\xi) + g'(\xi) = 0.$$

Haciendo $f(\xi) = g'(\xi)$,

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{1}{\xi} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln f(\xi) = -\ln \xi + c \qquad \Longrightarrow \qquad f(\xi) = \frac{A}{\xi}, \qquad A > 0.$$

Como $f(\xi) = g'(\xi)$,

$$g(\xi) = A \ln \xi + B, \qquad A > 0,\ B \in \mathbb{R}.$$

(c) Denotando $\xi = xy$,

$$\phi_x = yg'(\xi), \qquad \phi_{xx} = y^2 g''(\xi),$$
$$\phi_y = xg'(\xi), \qquad \phi_{yy} = x^2 g''(\xi),$$

luego

$$\Delta\phi = (x^2 + y^2) g''(\xi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g''(\xi) = 0,$$

cuya solución es

$$g(\xi) = A\xi + B, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(d) Denotando $\xi = x + \sqrt{x^2 + y^2} = x + r$,

$$\phi_x = \frac{\xi}{r} g'(\xi), \qquad \phi_{xx} = \left(\frac{\xi}{r^2} - \frac{\xi x}{r^3}\right) g'(\xi) + \frac{\xi^2}{r^2} g''(\xi),$$
$$\phi_y = \frac{y}{r} g'(\xi), \qquad \phi_{yy} = \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right) g'(\xi) + \frac{y^2}{r^2} g''(\xi) = \frac{x^2}{r^3} g'(\xi) + \frac{y^2}{r^2} g''(\xi).$$

Pero

$$\frac{\xi}{r^2} - \frac{\xi x}{r^3} + \frac{x^2}{r^3} = \frac{\xi r + x(x - \xi)}{r^3} = \frac{\xi r - rx}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r},$$

y

$$\xi^2 + y^2 = r^2 + 2rx + x^2 + y^2 = 2r^2 + 2rx = 2r\xi,$$

luego

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} g'(\xi) + \frac{2\xi}{r} g''(\xi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2\xi g''(\xi) + g'(\xi) = 0.$$

Haciendo $f(\xi) = g'(\xi)$,

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{1}{2\xi} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln f(\xi) = -\frac{1}{2} \ln \xi + c \qquad \Longrightarrow \qquad f(\xi) = \frac{A}{\sqrt{\xi}}, \qquad A > 0.$$

Como $f(\xi) = g'(\xi)$,

$$g(\xi) = 2A\sqrt{\xi} + B, \qquad A > 0,\ B \in \mathbb{R}.$$

(e) Denotando $\xi = (x^2 + y^2)/x$,

$$\phi_x = \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) g'(\xi), \qquad \phi_{xx} = 2\frac{y^2}{x^3} g'(\xi) + \left(1 - \frac{y^2}{x^3}\right)^2 g''(\xi),$$
$$\phi_y = 2\frac{y}{x} g'(\xi), \qquad \phi_{yy} = \frac{2}{x} g'(\xi) + 4\frac{y^2}{x^2} g''(\xi),$$

luego

$$\Delta\phi = \frac{2\xi}{x^2} g'(\xi) + \underbrace{\left[\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^2 + 4\frac{y^2}{x^2}\right]}_{=(1+y^2/x^2)^2=\xi^2/x^2} g''(\xi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi g''(\xi) + 2g'(\xi) = 0.$$

Haciendo $f(\xi) = g'(\xi)$,

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{2}{\xi} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln f(\xi) = -2\ln\xi + c \qquad \Longrightarrow \qquad f(\xi) = \frac{A}{\xi^2}, \qquad A > 0.$$

Como $f(\xi) = g'(\xi)$,

$$g(\xi) = -\frac{A}{\xi} + B, \qquad A > 0,\ B \in \mathbb{R}.$$

(f) Denotando $\xi = y/x$,

$$\phi_x = -\frac{\xi}{x} g'(\xi), \qquad \phi_{xx} = 2\frac{\xi}{x^2} g'(\xi) + \frac{\xi^2}{x^2} g''(\xi),$$
$$\phi_y = \frac{1}{x} g'(\xi), \qquad \phi_{yy} = \frac{1}{x^2} g''(\xi),$$

luego

$$\Delta\phi = \frac{1}{x^2}\left[2\xi g'(\xi) + (1+\xi^2) g''(\xi)\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (1+\xi^2) g''(\xi) + 2\xi g'(\xi) = 0.$$

Haciendo $f(\xi) = g'(\xi)$,

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{2\xi}{1+\xi^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln f(\xi) = -\ln(1+\xi^2)+c \qquad \Longrightarrow \qquad f(\xi) = \frac{A}{1+\xi^2}, \qquad A > 0.$$

Como $f(\xi) = g'(\xi)$,

$$g(\xi) = A\arctan\xi + B, \qquad A > 0,\ B \in \mathbb{R}.$$ □

Problema 2.13. Halla una función holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(1+i) = 0$, $f'(0) = 0$ y $\operatorname{Re} f'(z) = 3(x^2 - y^2) - 4y$.

Solución: Consideremos primero la función $g(z) = f'(z)$, también holomorfa. Sabemos que

$$\operatorname{Re} g(z) = 3(x^2 - y^2) - 4y = 3\operatorname{Re}(z^2) - 4\operatorname{Im} z = \operatorname{Re}(3z^2 + 4iz),$$

luego $g(z) = 3z^2 + 4iz + ic$, con $c \in \mathbb{R}$, y como $g(0) = f'(0) = 0$, deducimos que $c = 0$. Entonces tenemos

$$g(z) = f'(z) = 3z^2 + 4iz \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) = z^3 + 2iz^2 + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{C}.$$

Para determinar κ usamos la condición que queda, $f(1+i)=0$. Como $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$,

$$2^{3/2}\underbrace{e^{i3\pi/4}}_{=(-1+i)/\sqrt{2}}+2i2\underbrace{e^{i\pi/2}}_{=i}+\kappa=2(-1+i)-4+\kappa=0,$$

de donde $\kappa=6-2i$, así que

$$f(z)=z^3+2iz^2+6-2i.$$ □

Problema 2.14. *(Polinomio interpolador de Lagrange)*

(a) Sea $Q(z)$ un polinomio de grado n con n raíces distintas, $z_1,z_2,\dots,z_n$, y $P(z)$ un polinomio de grado menor que n. Demuestra que

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)(z-z_k)}.$$

(b) Utiliza esta fórmula para demostrar que existe un único polinomio de grado menor que n que tome valores prefijados w_k en los puntos z_k

Solución: (a) El polinomio $Q(z)$ debe ser de la forma

$$Q(z)=A(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n),$$

así que podemos definir los n polinomios de grado $n-1$

$$L_k(z)=\begin{cases}\dfrac{Q(z)}{z-z_k} & \text{si } z\neq z_k,\\ Q'(z_k) & \text{si } z=z_k,\end{cases}\qquad k=1,2,\dots,n.$$

La definición del valor en $z=z_k$ está hecha de tal modo que $L_k(z)$ sea una función continua en ese punto, por lo cual sabemos que

$$Q'(z_k)=A(z_1-z_k)\cdots(z_{k-1}-z_k)(z_{k+1}-z_k)\cdots(z-z_n),$$

que no se anula, ya que todas la raíces son distintas. Los polinomios $L_k(z)$ cumplen la propiedad

$$L_k(z_j)=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq k,\\ Q'(z_k) & \text{si } j=k.\end{cases}$$

Debido a ella sabemos que son linealmente independientes, porque

$$\alpha_1L_1(z)+\alpha_2L_2(z)+\cdots+\alpha_nL_n(z)=0$$

implica, sustituyendo en $z=z_j$, que

$$0=\alpha_1L_1(z_j)+\cdots+\alpha_nL_n(z_j)=\alpha_jQ'(z_j),$$

es decir (debido a que $Q'(z_j)\neq 0$), que $\alpha_j=0$. Como hay n de tales polinomios, el conjunto $\{L_k(z)\}$ forma una base del conjunto de polinomios de grado menor que n. Así que podemos desarrollar $P(z)$, cuyo grado es menor que n, en esa base y obtener

$$P(z)=\sum_{k=1}^{n}p_kL_k(z).$$

Para calcular los coefcientes p_k basta sustituir $z = z_j$,

$$P(z_j) = \sum_{k=1}^{n} p_k L_k(z_j) = p_j Q'(z_j) \quad \Rightarrow \quad p_j = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}.$$

Dividiendo por $Q(z)$ el desarrollo de $P(z)$ llegamos finalmente a

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)(z - z_k)}.$$

□

(b) La expresión

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} L_k(z)$$

es única porque los polinomios $\{L_k(z)\}$ forman una base. Si el polinomio $P(z)$ es tal que $P(z_k) = w_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$, entonces el polinomio en cuestión tiene que estar dado por la fórmula

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{Q'(z_k)} L_k(z),$$

que, en un abuso de notación, podemos escribir como la fórmula interpolatoria

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k \frac{Q(z)}{Q'(z_k)(z - z_k)}.$$

Problema 2.15. Prueba que si $|a| < 1$, la función

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a} z}$$

es una función holomorfa en $D(0, 1)$ y calcula $f'(z)$.

Solución: Como $f(z)$ es una función racional, será holomorfa en todo $\mathbb{C}$ excepto en los ceros del denominador. El único cero del denominador es $z = 1/\overline{a}$; como

$$\left| \frac{1}{\overline{a}} \right| = \frac{1}{|a|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{a}} \notin D(0, 1),$$

la función $f(z)$ es holomorfa en $D(0, 1)$. La derivada se obtiene mediante la regla del cociente:

$$f'(z) = \frac{(1 - \overline{a} z) + \overline{a}(z - a)}{(1 - \overline{a} z)^2} = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a} z)^2}.$$

□